UNIVERSAL
LIBRARY

OU_220598

UNIVERSAL
LIBRARY

OSMANIA UNIVERSITY LIBRARY

Call No. 519/T16C Accession No. 15754

Author Tannenberg, W. Dr.

Title Calcul des erreurs absolues relatives 1922

This book should be returned on or before the date last marked below.

CALCUL

DES

ERREURS ABSOLUES

ET DES

ERREURS RELATIVES

PAR

W. DE TANNENBERG

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, DOCTEUR ÈS SCIENCES
ANCIEN PROFESSEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

PARIS
LIBRAIRIE VUIBERT
63, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

1922

Tous droits de traduction et de reproduction réservés pour tous pays.
Copyright by Vuibert, 1922.

INTRODUCTION

Le principe de la methode utilisee dans cette brochure est dû au Commandant Guyou. Les formules qui constituent la base de la théorie sont identiques à celles que l'on rencontre dans le calcul des dérivées et n'exigent par suite aucun effort nouveau de mémoire. Aussi les procédés de calcul qui en dérivent sont-ils très vite appris par les élèves, comme je l'ai constaté depuis longtemps. Je serais heureux si ces quelques leçons pouvaient contribuer à divulguer une méthode à la fois élégante et pratique.

W. DE TANNENBERG.

ERREURS ABSOLUES

ET

ERREURS RELATIVES

CALCUL DES ERREURS ABSOLUES

I

Préliminaires. Objet de la question.

1. Définitions. — La différence entre la valeur exacte a d'un nombre et sa valeur approchée a' est ce que l'on appelle l'*erreur absolue* du nombre approché.

Une *limite supérieure* de l'erreur est par définition un nombre superieur à cette erreur.

Dans la pratique, cette erreur est assez petite pour que l'on puisse prendre comme limite supérieure une fraction décimale de la forme $\frac{1}{\alpha.10^n}$, α étant un nombre d'un chiffre. Par exemple, si on prend pour le nombre π la valeur approchée par défaut

$$\pi' = 3{,}1415,$$

l'erreur absolue e,

$$e = 0{,}0000926... < \frac{1}{10^4},$$

est moindre qu'une unité de l'ordre du dernier chiffre conservé.

2. Regle relative a la réduction du nombre des décimales d'un nombre décimal donné. — Si dans un nombre décimal donné a on supprime les chiffres décimaux qui suivent le n^e, on obtient une valeur approchée par défaut a' et l'erreur absolue

$$e < \frac{1}{10^n}.$$

Supposons que le premier chiffre supprimé soit *supérieur au chiffre* 5. Il convient alors de forcer le n^e chiffre conservé, c'est-à-dire de l'augmenter d'une unité. On obtient un nombre a_1 approché par *excès* et l'erreur absolue

$$e_1 < \frac{1}{2.10^n}.$$

En effet, désignons par les lettres a, a', a_1 les points de l'axe des x qui ont respectivement les nombres a, a', a_1 pour abscisses

x' δ x
a' a a₁

et soit $$\delta = a'a_1 = \frac{1}{10^n}.$$

Le point a est compris entre a' et a_1 ; en outre, par hypothèse,

$$a'a > \frac{\delta}{2},$$

donc $$aa_1 < \frac{\delta}{2}, \qquad \text{ou} \qquad aa_1 < \frac{1}{2.10^n},$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

3. Règle relative à la réduction du nombre des décimales d'un nombre approché. — Plus généralement, soit x' une valeur approchée par *défaut* d'un nombre inconnu x et supposons démontré que

$$(1) \qquad x - x' < \frac{1}{10^n}. \qquad \frac{1}{10^n} = \delta.$$

Si on convertit x' en fraction décimale, il convient dans la pratique de transformer la valeur approchée x' en une autre de *même limite supérieure mais n'ayant que n décimales.* A cet effet :

1° on supprime toutes les décimales qui suivent la n^e, ce qui donne un nombre x'_n ;

2° on augmente d'une unité le dernier chiffre de x'_n, ce qui donne un nombre x_n.

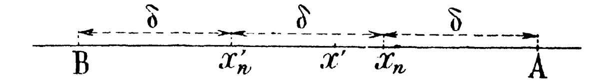
Ceci posé, on applique la règle suivante :

Règle. — *On prend pour valeur approchée de x le nombre x_n. Ce nombre est approché par excès et l'erreur est moindre que δ :*

$$x_n - x < \frac{1}{10^n} ;$$

mais la condition unique (1) *ne permet pas de fixer le sens de l'approximation.*

Utilisons la représentation géométrique précédente.



Le point x se trouve par hypothèse à droite du point x' à une distance inférieure à δ et par suite à gauche du point A. Sa distance au point x'_n *n'est pas forcément inférieure à* δ, tandis que sa distance au point x_n *est certainement inférieure*

à δ. Toutefois la condition unique (1) ne permet pas de dire si le point x est à droite ou à gauche de x_n. La règle est donc complètement justifiée.

On remarquera en outre que cette règle est indépendante du chiffre qui suit la n^e décimale dans la valeur approchée x'. Elle doit être appliquée même si ce chiffre est inférieur à 5.

Remarque. — La règle précédente suppose essentiellement que x' est une valeur approchée par défaut. Dans le cas où x' est approchée par *excès*, il faudra pour être certain de ne pas modifier la limite supérieure de l'erreur, remplacer x' par x'_n et non par x_n ; en d'autres termes *il ne faudra pas forcer la n^e décimale conservée*. Dans ce cas encore la condition unique (1) ne permet pas de fixer le sens de l'approximation. La figure met tout cela en évidence.

4. Notation. — Soit

$$a - a' = \Delta a, \qquad e = |a - a'|,$$

$\Delta a > 0$ si a' est approchée par défaut,

$\Delta a < 0$ — excès.

5. Énoncé des deux problèmes fondamentaux. — Supposons donnée une formule arithmétique

$$x = f(a, b, c, \ldots)$$

composée avec des nombres a, b, c... dont on ne peut avoir une valeur numérique exacte. Deux problèmes se posent naturellement :

1° On remplace a, b, c... par des valeurs approchées déterminées a', b', c'... Trouver une limite supérieure de l'erreur commise sur la valeur approchée

$$x' = f(a', b', c', \ldots).$$

2° Avec quelle approximation faut-il calculer a, b, c, ... pour que l'erreur commise sur x' soit inférieure à un nombre donné ?

La solution de ces deux problèmes est fondée sur l'emploi de quelques formules que nous allons établir. On remarquera que ces formules sont identiques à celles utilisées dans la *théorie des dérivées.* Elles n'exigent donc aucun effort nouveau de mémoire.

II

Solution du premier problème fondamental.

Il s'agit de déterminer une limite supérieure de l'erreur commise sur une somme, une différence, un produit, un quotient, une racine, connaissant les limites supérieures des erreurs dont les données sont entachées.

1. Erreur commise sur une somme. — Soit

$$x = a + b$$

une somme de deux nombres a et b dont on ne peut avoir une valeur numérique exacte. Soient a' et b' des valeurs approchées par *défaut* de a et b,

$$a' = a - \Delta a, \qquad b' = b - \Delta b, \qquad \Delta a > 0, \qquad \Delta b > 0\,;$$

la valeur approchée x',

$$x' = a' + b',$$

est une valeur par défaut et l'erreur est

$$\Delta x = a + b - (a - \Delta a) - (b - \Delta b),$$

ou bien

$$\text{(I)} \qquad \Delta x = \Delta a + \Delta b.$$

Si on connaît une limite supérieure de Δa et Δb, cette formule fait connaître une limite supérieure de Δx.

2. Erreur commise sur une différence. — Soit

$$x = a - b$$

et soient encore a' et b' des valeurs approchées de a et de b ; mais ici nous supposerons a' approchée par *défaut* et b' approchée par *excès*, de sorte que

$$\Delta a > 0, \qquad \Delta b < 0 ;$$

la valeur approchée

$$x' = a' - b'$$

est alors par *défaut* et l'erreur est

$$\Delta x = a - b - (a - \Delta a) + (b - \Delta b),$$

ou bien

$$\text{(II)} \qquad \Delta x = \Delta a - \Delta b,$$

$$\Delta a > 0, \qquad \Delta b < 0, \qquad \Delta x > 0.$$

Si on désigne par δ la valeur absolue d'une erreur Δ, on peut écrire

$$\delta x = \delta a + \delta b ;$$

comme la formule I, cette formule permet de calculer une limite supérieure de δx connaissant une limite supérieure de δa et δb.

3. Erreur commise sur un produit. — Soient

$$x = ab,$$

et a', b' les valeurs approchées par *défaut* de a et de b. L'erreur absolue de la valeur approchée par *défaut*

$$x' = a'b'$$

est

$$\Delta x = ab - (a - \Delta a)(b - \Delta b),$$

$$\Delta x = a\Delta b + b\Delta a - \Delta a\Delta b.$$

En supprimant le terme soustractif, on augmente le second membre, donc une *limite supérieure* de Δx est donnée par la formule

$$\text{(III)} \qquad \Delta_1 x = a\Delta b + b\Delta a, \qquad \Delta a > 0, \qquad \Delta b > 0.$$

Cette formule permet de résoudre le problème proposé dans le cas où l'inconnue x est un produit (voir exemple numérique plus loin).

4. Erreur commise sur un quotient. — Soient

$$x = \frac{a}{b},$$

a' une valeur approchée de a par *défaut*,
b' — b par *excès* ;

la valeur

$$x' = \frac{a'}{b'}$$

est une valeur approchée par *défaut* de x et son erreur absolue est

$$\Delta x = \frac{a}{b} - \frac{a - \Delta a}{b - \Delta b}, \qquad \Delta a > 0, \qquad \Delta b < 0,$$

ou bien

$$\Delta x = \frac{b\Delta a - a\Delta b}{b(b - \Delta b)}.$$

Comme Δb est négatif, on augmente le second membre en supprimant le second terme du dénominateur. Donc une limite supérieure de Δx est $\Delta_1 x$:

$$\text{(IV)} \qquad \Delta_1 x = \frac{b\Delta a - a\Delta b}{b^2}, \qquad \Delta a > 0, \qquad \Delta b < 0, \qquad \Delta x > 0.$$

Cette formule permet de résoudre le problème proposé dans le cas où x est un quotient.

Si on désigne encore par δ la valeur absolue d'une erreur Δ, on peut écrire

$$\text{(IV}bis\text{)} \qquad \delta_1 x = \frac{b\delta a + a\delta b}{b^2} ;$$

cette formule est celle qu'on utilise dans la pratique.

5. Erreur commise sur une puissance. — Soit d'abord

$$x = a^2\ ;$$

la formule (III) donne

$$\Delta_1 x = 2a\Delta a, \qquad \Delta a > 0.$$

Plus généralement, si

$$x = a^m, \qquad (m = \text{entier}),$$

on trouve de proche en proche

$$\Delta_1 x = ma^{m-1}\Delta a.$$

6. Erreur commise sur une racine carrée. — Soient

$$x = \sqrt{a}, \qquad x' = \sqrt{a + \delta a}, \qquad \delta a > 0;$$

l'erreur de la valeur x' approchée par *excès* est

$$\delta x = \sqrt{a + \delta a} - \sqrt{a},$$

$$\delta x = \frac{\delta a}{\sqrt{a + \delta a} + \sqrt{a}}, \qquad \delta a > 0.$$

Si dans le dénominateur on supprime δa, on augmente le second membre, donc une limite supérieure de δx est

$$\delta_1 x = \frac{\delta a}{2\sqrt{a}}.$$

Tableau récapitulatif.

Notations

a valeur exacte, a' valeur approchée ; erreur absolue :

$$a - a' = \Delta a.$$

$\Delta a > 0$, erreur par défaut ;

$\Delta a < 0$, — excès ;

δa, valeur absolue de Δa,
$\delta_1 a$, limite supérieure de δa.

I

$$x = a + b, \qquad \Delta a > 0, \qquad \Delta b > 0.$$
$$\Delta x = \Delta a + \Delta b, \qquad \delta x = \delta a + \delta b.$$

II

$$x = a - b, \qquad \Delta a > 0, \qquad \Delta b < 0.$$
$$\Delta x = \Delta a - \Delta b, \qquad \delta x = \delta a + \delta b.$$

III

$$x = ab, \qquad \Delta a > 0, \qquad \Delta b > 0.$$
$$\Delta_1 x = a\Delta b + b\Delta a, \qquad \delta_1 x = a\delta b + b\delta a.$$

IV

$$x = \frac{a}{b}, \qquad \Delta a > 0, \qquad \Delta b < 0.$$
$$\Delta_1 x = \frac{b\Delta a - a\Delta b}{b^2}, \qquad \delta_1 x = \frac{b\delta a + a\delta b}{b^2}$$

V

$$x = a^m, \qquad \Delta a > 0.$$
$$\Delta_1 x = ma^{m-1}\Delta a, \qquad \delta_1 x = ma^{m-1}\delta a.$$

VI

$$x = \sqrt{a}, \qquad \Delta a < 0.$$
$$\delta_1 x = \frac{\delta a}{2\sqrt{a}}$$

III

Solution du premier problème fondamental (*Suite*). Applications numériques.

1. Exemple I. — *Soit*

$$x = \pi\sqrt{5}\ ;$$

on suppose que l'on prenne 4 chiffres décimaux dans π *et* 3 *dans* $\sqrt{5}$,

$$\pi = 3{,}1415, \qquad \sqrt{5} = 2{,}236\ ;$$

trouver une limite supérieure de l'erreur commise dans le calcul de x.

Appliquons la formule (III),

$$\Delta_1 x = a\Delta b + b\Delta a, \qquad a = \pi, \qquad b = \sqrt{5}\,;$$

par hypothèse

$$\Delta a < \frac{1}{10^4}, \qquad \Delta b < \frac{1}{10^3}\ ;$$

une limite supérieure cherchée est

$$\frac{a}{10^3} + \frac{b}{10^4} = \frac{10a + b}{10^4}\ ;$$

à fortiori

$$\Delta x < \frac{40 + 3}{10^4} < \frac{10^2}{10^4}$$

et par suite

$$\Delta x < \frac{1}{10^2}.$$

Tel est le résultat cherché.

Remarque. — Ainsi une valeur approchée de x à 0,01 près par *défaut* est

$$x' = 3{,}1415 \times 2{,}236 = 7{,}024394. \qquad e < \frac{1}{100}.$$

Appliquons la règle établie (I, 3); nous trouvons

$$x_2 = 7{,}03, \qquad e < \frac{1}{100}.$$

La méthode n'indique pas si l'erreur est par défaut ou par excès. On verra directement qu'elle est par *défaut.*

2. Exemple II. — *Soit*

$$x = \frac{\sqrt{6}}{\pi};$$

on prend $\sqrt{6}$ *par* défaut *avec* 4 *décimales exactes et* π *par* excès *avec* 3 *décimales,*

$$\sqrt{6} = 2{,}4494, \qquad \pi = 3{,}142 ;$$

trouver une limite supérieure de l'erreur commise dans le calcul de x.

Appliquons la formule IV,

$$\delta_1 x = \frac{b\delta a + a\delta b}{b^2}, \quad a = \sqrt{6}, \qquad b = \pi$$

et remarquons que

$$3 < b < 4, \qquad a < 3,$$

donc

$$\delta x < \frac{4\delta a + 3\delta b}{9};$$

or, par hypothèse,

$$\delta a < \frac{1}{10^4}, \qquad \delta b < \frac{1}{10^3},$$

donc

$$\delta x < \frac{34}{9.10^4} < \frac{90}{9.10^4},$$

ou enfin

$$\delta x < \frac{1}{10^3}.$$

Tel est le résultat cherché.

Remarque. — Une valeur approchée de x à 0,001 près par

défaut est

$$x' = \frac{2{,}449}{3{,}142} = 0{,}7794..., \qquad e < \frac{1}{10^3};$$

mais en appliquant la règle établie (I, 3), nous trouvons

$$x_2 = 0{,}780, \qquad e < \frac{1}{10^3}.$$

La méthode n'indique pas si l'erreur est par défaut ou par excès.

3. Exemple III. — *Soit*

$$x = \sqrt{\pi}\,;$$

on prend π *par* excès *avec* 4 *décimales*,

$$\pi = 3{,}1416\,;$$

trouver une limite supérieure de l'erreur commise dans le calcul de x.

Appliquons la formule VI,

$$\delta_1 x = \frac{\delta\pi}{2\sqrt{\pi}},$$

d'où

$$\delta x < \delta\pi < \frac{1}{10^4}.$$

Tel est le résultat cherché.

Une valeur approchée de x à 0,0001 près par *excès* est donc

$$x' = \sqrt{3{,}1416} = 1{,}772455...$$

D'après la règle (I, 3, Rem.), il faudra prendre pour valeur approchée de x

$$x'_2 = 1{,}7724. \qquad e < \frac{1}{10^4}.$$

Comme dans les cas précédents, la règle utilisée ne permet pas de dire si la valeur de $\sqrt{\pi}$ est approchée par excès ou par défaut. On vérifiera directement (par exemple en élevant x'_2 au carré) que la valeur approchée x'_2 est *approchée par défaut*.

IV

Solution du second problème fondamental.

1. Exemple I. — *Calculer le nombre*

$$x = \pi\sqrt{5}$$

à 0,01 *près*. (Comparer avec III, 1.)

Appliquons la formule

$$\Delta_1 x = a\Delta b + b\Delta a, \qquad a = \pi, \qquad b = \sqrt{5}\,;$$

on doit avoir

$$a\Delta b + b\Delta a < \frac{1}{10^2}\,;$$

il suffit pour cela que

$$a\Delta b < \frac{1}{2.10^2}, \qquad b\Delta a < \frac{1}{2.10^2},$$

$$\Delta b < \frac{1}{2a.10^2}, \qquad \Delta a < \frac{1}{2b.10^2}$$

Ces inégalités seront vérifiées *a fortiori* si Δb et Δa sont respectivement inférieurs à des nombres plus petits que les seconds membres, c'est-à-dire si

$$\Delta b < \frac{1}{10^3}, \qquad \Delta a < \frac{1}{10^3}.$$

Il suffit donc de prendre pour π et $\sqrt{5}$ les valeurs par défaut

$$\pi = 3{,}141, \qquad \sqrt{5} = 2{,}236.$$

La valeur approchée par *défaut* et satisfaisant à la question est

$$x' = 3{,}141 \times 2{,}236 = 7{,}023276, \qquad e < \frac{1}{10^2},$$

mais, d'après la règle (I, 3), on doit remplacer x' par

$$x_2 = 7{,}03, \qquad e < \frac{1}{10^2}.$$

Le sens de l'approximation n'est pas fixé par la règle, mais on vérifie facilement que la valeur x_2 est approchée par *défaut*.

2. Exemple II. — *Calculer le nombre*

$$x = \frac{\sqrt{6}}{\pi}$$

à 0,001 *près*. (Comparer avec III, 2.)

Appliquant la formule IV, en remarquant que $\Delta a > 0$, $\Delta b < 0$, on trouve successivement

$$\frac{b\delta a + a\delta b}{b^2} < \frac{1}{10^3}, \qquad a = \sqrt{6}, \qquad b = \pi,$$

$$\frac{\delta a}{b} < \frac{1}{2.10^3}, \qquad \frac{a\delta b}{b^2} < \frac{1}{2.10^3},$$

$$\delta a < \frac{b}{2.10^3}, \qquad \delta b < \frac{b^2}{2a.10^3}.$$

Ces inégalités seront vérifiées *a fortiori* si δa et δb sont inférieures à des nombres plus petits que les seconds membres, c'est-à-dire si

$$\delta a < \frac{2}{2.10^3}, \qquad \delta b < \frac{9}{2.4,5.10^3}$$

ou bien

$$\delta a < \frac{1}{10^3}. \qquad \delta b < \frac{1}{10^3}.$$

Il suffit donc de prendre

$$\sqrt{6} = 2,449 \text{ (défaut)}, \qquad \pi = 3,142 \text{ (excès)},$$

ce qui donne la valeur approchée par *défaut*

$$x' = \frac{2,449}{3,142} = 0,7794\ldots$$

D'après la règle déjà utilisée (I, 3), on doit remplacer la valeur approchée x' par

$$x_2 = 0,780, \qquad e < \frac{1}{1000}.$$

Le sens de l'approximation n'est pas donné par la règle.

3. Exemple III. — *Calculer le nombre*

$$x = \sqrt{\pi}$$

à 0,0001 *près.*

Appliquons la formule

$$\delta_1 x = \frac{\delta a}{2\sqrt{a}}, \qquad a = \pi,$$

qui donne une limite supérieure de l'erreur d'une valeur approchée par *excès*.

On doit avoir

$$\frac{\delta a}{2\sqrt{a}} < \frac{1}{10^4} \qquad \text{ou} \qquad \delta a < \frac{2\sqrt{a}}{10^4};$$

cette inégalité sera vérifiée *a fortiori* si δa est inférieure à une quantité plus petite que le second membre, c'est-à-dire si

$$\delta a < \frac{1}{10^4}.$$

Une valeur approchée de x satisfaisant à la question est donc

$$x' = \sqrt{3,1416} = 1,77245..., \qquad e < \frac{1}{10^4},$$

et, d'après la règle (I, 3, Rem.) on doit remplacer x' par

$$x'_4 = 1,7724, \qquad e < \frac{1}{10^4}.$$

On vérifiera comme plus haut que cette valeur est approchée par *défaut*.

CALCUL DES ERREURS RELATIVES

V

Préliminaires. Objet de la question.

1. Définition. — Soient comme précédemment :

1° a un nombre dont on ne peut obtenir une valeur numerique exacte ;

2° a' une valeur approchée ;

3° e l'erreur absolue.

Par définition l'*erreur relative* ε du nombre approché a' est le quotient de l'erreur absolue e par la valeur exacte a,

$$\varepsilon = \frac{e}{a}.$$

Remarque. — Si on rend le nombre a m fois plus grand (ou plus petit), la valeur approchée ma' devient m fois plus grande (ou plus petite), donc :

1° l'erreur absolue devient m fois plus grande (ou plus petite) ;

2° l'erreur relative ne change pas.

2. Problème I. — *Soient :*

1° *k le premier chiffre significatif à gauche d'un nombre approché par défaut a' (supposé converti en fraction décimale);*

2° *m le nombre des chiffres exacts (à partir du chiffre k inclus) dans ce nombre a'.*

Trouver une limite supérieure de l'erreur relative du nombre approché a'.

D'après la remarque précédente, l'erreur relative est indé-

pendante de la position de la virgule dans l'expression de a' ; nous pouvons donc supposer cette virgule placée entre le m^e chiffre exact et le suivant.

Dans ce cas,

$$e < 1, \qquad \text{d'où} \qquad \varepsilon = \frac{e}{a} < \frac{1}{a} ;$$

d'autre part, si on remplace dans la partie entière tous les chiffres sauf le premier par des zéros, on diminue le nombre a', donc

$$a > k.10^{m-1},$$

et par suite

$$\varepsilon < \frac{1}{k.10^{m-1}}.$$

Telle est la limite supérieure cherchée.

3. Problème II. — *Soit k le premier chiffre significatif à gauche d'un nombre approché par défaut a' (supposé converti en fraction décimale). Par hypothèse l'erreur relative est*

$$\varepsilon < \frac{1}{h.10^m},$$

h étant un chiffre donné. Trouver sur combien de chiffres exacts on peut compter dans le nombre a'.

Comme précédemment nous pouvons supposer la virgule placée immédiatement après le m^e chiffre à partir du chiffre k inclus. Ceci posé,

$$\frac{e}{a} < \frac{1}{h.10^m} \qquad \text{ou} \qquad e < \frac{a}{h.10^m},$$

mais

$$a < (k+1)10^{m-1},$$

donc

$$e < \frac{k+1}{h} \cdot \frac{1}{10}.$$

1er *Cas.* $h > k$;

d'où

$$h \geqslant k + 1, \qquad e < \frac{1}{10} ;$$

le nombre a' a donc certainement $m + 1$ chiffres exacts.

2e *Cas.* $h \leqslant k$;

comme h et k sont des nombres d'un chiffre,

$$\frac{k+1}{h} < 10$$

et par suite

$$e < 1 ;$$

dans le nombre a' on ne peut donc compter que sur m chiffres exacts.

Ainsi, dans la valeur approchée a' on peut compter :

1° sur $m + 1$ chiffres exacts à partir du chiffre k inclus, si $h > k$;

2° sur m chiffres exacts si $h \leqslant k$.

4. Conséquences. — Les deux problèmes précédents permettent d'énoncer les deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Soient :*

1° k le premier chiffre significatif à gauche d'un nombre approché par défaut (supposé converti en fraction décimale) ;

2° m le nombre des chiffres exacts (à partir du chiffre k inclus) dans ce nombre approché ;

une limite supérieure de l'erreur relative est donnée par l'inégalité

$$\varepsilon < \frac{1}{k.10^{m-1}}.$$

Théorème II. — *Soient :*

1° k le premier chiffre significatif à gauche d'un nombre approché par défaut ;

2° *h un nombre donné d'un chiffre ;*

si
$$\varepsilon < \frac{1}{h.10^m},$$

on peut compter sur $m+1$ *chiffres exacts à partir du chiffre* k *si* $h > k$, *et sur* m *chiffres exacts si* $h \leqslant k$.

Dans l'application du *théorème* I, nous aurons à utiliser la remarque suivante.

Remarque. — Soit a' un nombre approché par défaut avec m chiffres exacts (d'un nombre a) et supposons que l'on supprime toutes les décimales qui suivent le m^e chiffre exact, on obtient un nombre approché par défaut pour lequel l'erreur absolue

$$e < \frac{1}{10^n},$$

n étant l'ordre de la dernière décimale conservée.

Ceci posé, si on force d'une unité la n^e décimale, on obtient une valeur approchée a'' par excès, mais la limite supérieure de l'erreur absolue n'est pas altérée ; il en est donc de même de la limite supérieure de l'erreur relative. On peut donc affirmer que pour le second nombre approché a'', on a encore

$$\varepsilon < \frac{1}{k.10^{m-1}}.$$

Par exemple, soit

$$\pi = 3{,}1415926....,$$

et soit

$$\pi' = 3{,}1415,$$

une valeur approchée par défaut avec 5 *chiffres exacts.*

Le théorème I donne

$$\varepsilon < \frac{1}{3.10^4} ;$$

mais pour le nombre approché par *excès* π'',

$$\pi'' = 3{,}1416,$$

on a encore

$$\varepsilon < \frac{1}{3.10^4};$$

quoiqu'il n'ait pas 5 chiffres exacts.

5. Énoncé des problèmes du type fondamental. — Les notions précédentes conduisent naturellement au problème type suivant.

Problème fondamental. — *On donne une formule arithmétique*

$$x = f(a, b, c, \dots)$$

composée avec des nombres a, b, c..., dont on ne peut trouver une valeur numérique exacte. Avec quelle approximation faut-il calculer a, b, c, ... pour que la valeur approchée de x contienne un nombre donné de chiffres exacts *à partir du* 1er *chiffre significatif à gauche. Déterminer ensuite cette valeur approchée.*

La solution de ce problème repose sur les théorèmes I et II et sur des formules qui seront établies dans le chapitre suivant. On remarquera que ces formules sont analogues à celles que l'on rencontre dans la théorie des logarithmes. Comme les formules des erreurs absolues, elles n'exigent aucun effort nouveau de mémoire.

6. Problèmes dérivés du précédent. — Dans la pratique on rencontre d'autres types de problèmes sur les erreurs relatives, mais ils se ramènent au précédent ou sont des conséquences immédiates des formules du chapitre suivant.

1er type. — *La donnée étant la même, avec quelle approximation faut-il déterminer a, b, c pour que l'*erreur relative *ε de x' soit moindre qu'un nombre donné, par exemple* 0,0001.

$$\varepsilon < \frac{1}{10^4};$$

déterminer ensuite cette valeur approchée x'.

Pour que cette inégalité soit vérifiée, il suffit (th. I) que le nombre approché ait 5 *chiffres exacts* à partir du 1[er] chiffre significatif à gauche. On est donc ramené au problème précédent.

2e type. — *Calculer le nombre considéré déjà*

$$x = f(a, b, c, \dots)$$

à 0,0001 *près de sa valeur.*

Ce problème est identique au précédent.

3e type. — *Dans la formule précédente*

$$x = f(a, b, c, \dots\dots),$$

*on remplace a, b, c par des valeurs approchées déterminées a', b', c' ... ; trouver une limite supérieure de l'*erreur relative *commise sur la valeur approchée*

$$x' = f(a', b', c', \dots\dots).$$

La solution résulte immédiatement des formules du chapitre suivant.

4e type. — *Avec quelle approximation faut-il calculer $a, b, c\dots$ pour que* l'erreur absolue *commise sur la valeur approchée x' soit inférieure à un nombre donné,*

$$e < \frac{1}{10^n} ?$$

déterminer ensuite cette valeur approchée.

Ce problème a été résolu dans la première partie, sans la notion d'erreur relative. Il est souvent plus avantageux d'utiliser la théorie actuelle. A cet effet :

1° on détermine le 1[er] chiffre significatif à gauche k du

nombre exact x et l'ordre décimal de ce chiffre, ce qui en général est un problème très simple;

2° on en déduit le nombre m des chiffres exacts exigé.

On est ainsi ramené au problème fondamental. Dans l'application de cette méthode, le sens de l'approximation du résultat est toujours bien fixé.

VI

Formules utilisées dans le calcul des erreurs relatives.

Il s'agit de déterminer une limite supérieure de l'*erreur relative* commise sur un produit, un quotient, une racine, connaissant les limites supérieures des *erreurs relatives* dont les données sont entachées.

1. Erreur relative d'un produit. — Soit

$$x = ab$$

et conservons les notations utilisées plus haut (II, 3). On a vu que

$$\Delta_1 x = a\Delta b + b\Delta a, \qquad (\Delta a > 0, \qquad \Delta b > 0)\ ;$$

on en déduit

$$\frac{\Delta_1 x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

et par suite

$$\varepsilon_1 = \alpha + \beta, \qquad \text{(I)}$$

α, β étant les erreurs relatives de a' et b' et ε_1 une limite supérieure de l'erreur relative de x'.

2. Erreur relative d'un quotient. — Soit

$$x = \frac{a}{b};$$

on a vu que

$$\delta_1 x = \frac{b\delta a + a\delta b}{b^2}, \qquad \begin{cases} \delta a = +\Delta a > 0, \\ \delta b = -\Delta b > 0, \end{cases}$$

d'où

$$\frac{\delta_1 x}{x} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b};$$

on trouve encore

(I′) $$\varepsilon_1 = \alpha + \beta.$$

Rappelons que a' est une valeur approchée par *défaut* et b' une valeur approchée par *excès*. Enfin α est l'erreur relative de a' et β l'erreur relative de b'.

3. Erreur relative d'une puissance. — Soit

$$x = a^m;$$

on a trouvé (II, 5)

$$\Delta_1 x = ma^{m-1}\Delta a,$$

d'où

$$\frac{\Delta_1 x}{x} = m\frac{\Delta a}{a}$$

et par suite

(II) $$\varepsilon_1 = m\alpha.$$

4. Erreur relative d'une racine. — Soit

$$x = \sqrt{a};$$

la formule (II, 6) donne

$$\delta_1 x = \frac{\delta a}{2\sqrt{a}},$$

d'où

$$\frac{\delta_1 x}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta a}{a}$$

et par suite

(III) $$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\alpha.$$

5. Remarque. — Si dans les formules

$$x = ab \qquad \text{et} \qquad x = \frac{a}{b}$$

le nombre a est un nombre exact ($\Delta a = 0$), la formule I se réduit à

$$\varepsilon_1 = \beta.$$

VII

Solution des problèmes du type fondamental.

1. Exemple I. — *Calculer le nombre*

$$x = \frac{1}{\pi}$$

avec 5 chiffres exacts.

Le premier chiffre significatif à gauche de x, supposé converti en fraction décimale, est égal à 3. Il s'agit de calculer x avec 5 chiffres exacts à partir du chiffre 3 inclus. Soient

π' une valeur approchée de π par *excès*, (erreur relative, α),
$x' = \frac{1}{\pi'}$ la valeur — x par *défaut*, (erreur relative, ε).

On a vu (form. I') qu'une limite supérieure ε_1 de ε est

$$\varepsilon_1 = \alpha,$$

il suffit donc (théorème II) que

$$\alpha < \frac{1}{4.10^4}, \qquad (h = 4 > 3).$$

Cette inégalité sera *a fortiori* satisfaite si α est inférieure à un nombre plus petit que le second membre, c'est-à-dire si

$$\alpha < \frac{1}{30.10^4} \qquad \text{ou} \qquad \alpha < \frac{1}{3.10^5}.$$

Il suffit donc de prendre (V, 4, Rem.)

$$\pi' = 3,14160$$

et par suite

$$x' = \frac{1}{3,1416} = 0,318309...$$

La valeur approchée de x par *défaut* avec 5 chiffres exacts est donc

$$x = 0,31830 \qquad \text{(défaut)}.$$

2. Exemple II. — *Calculer le nombre*

$$x = \pi\sqrt{5}$$

avec 3 chiffres exacts.

Le 1er chiffre significatif à gauche dans x est 7 ; il s'agit donc de déterminer une valeur approchée de x avec 3 chiffres exacts à partir du chiffre 7 inclus. Soient

$$a = \sqrt{5}, \qquad b = \pi,$$

a' une valeur approchée de	a	par défaut	(erreur relative :	α),
b' —	b	—	(—	β),
$x' = a'b'$ —	x	—	(—	ε).

Une limite supérieure ε_1 de ε est (form. I)

$$\varepsilon_1 = \alpha + \beta$$

et la solution résulte d'une suite d'inégalités dont chacune est la *conséquence des suivantes*, à savoir

$$\alpha + \beta < \frac{1}{8.10^2}, \qquad \text{(th. II)}, \qquad h = 8 > 7,$$

$$\alpha < \frac{1}{16.10^2}, \qquad \beta < \frac{1}{16.10^2},$$

$$\alpha < \frac{1}{2.10^3}, \qquad \beta < \frac{1}{3.10^3},$$

d'où $\quad a' = 2{,}236, \quad b' = 3{,}141, \quad$ (th. I),

$$x' = a'b' = 7{,}023276,$$

et le résultat cherché est donc

$$x = 7{,}02, \qquad \text{(défaut).}$$

3. Exemple III. — *Calculer le nombre*

$$x = \frac{\sqrt{6}}{\pi},$$

avec 3 *chiffres exacts.*

Le premier chiffre significatif à gauche dans x, supposé converti en fraction décimale, est égal à 7. Il s'agit donc de déterminer une valeur approchée de x avec 3 chiffres exacts à partir du chiffre 7 inclus. Soient :

$$a = \sqrt{6}, \qquad b = \pi,$$

a' une valeur approchée de a par *défaut* (erreur relative α),
b' — — b par *excès* (— β),
$x' = \frac{a'}{b'}$ valeur — x par *défaut* (— ε).

Une limite supérieure ε_1 de ε est (form. I')

$$\varepsilon_1 = \alpha + \beta\,;$$

la solution résulte d'une suite d'inégalités dont chacune est la *conséquence des suivantes*, à savoir

$$\alpha + \beta < \frac{1}{8.10^2}, \qquad \text{(th. II)}, \qquad h = 8 > 7,$$

$$\alpha < \frac{1}{16.10^2}, \qquad \beta < \frac{1}{16.10^2},$$

$$\alpha < \frac{1}{2.10^3}, \qquad \beta < \frac{1}{3.10^3},$$

d'où (V, 4, Rem.)

$$a' = 2{,}449, \qquad b' = 3{,}142 \qquad \text{(th. I)}$$

et

$$x' = \frac{a'}{b'} = 0{,}7794...$$

Ainsi la valeur approchée par défaut de x avec 3 chiffres exacts est donc

$$x = 0{,}779, \qquad \text{(défaut)}.$$

4. Exemple IV. — *Calculer le rayon de la sphère terrestre à* 1^{km} *près par défaut.*

La circonférence d'un grand cercle étant 40.000 km., le rayon x est donné en kilomètres par la formule

$$x = \frac{40.000}{2\pi} = 20.000a, \qquad a = \frac{1}{\pi} = 0{,}318309...$$

Le nombre x a 4 chiffres à la partie entière et son 1er chiffre à gauche est 6. Il s'agit donc de déterminer une valeur approchée de x avec 4 chiffres exacts à partir du chiffre 6 inclus.

L'erreur relative de x' est égale (V, 1) à l'erreur relative α de a'. Il suffit donc (th. II) que

$$(1) \qquad \alpha < \frac{1}{7.10^3}, \qquad h = 7 > 6\,;$$

cette inégalité sera vérifiée *a fortiori* si α est inférieure à une quantité plus petite que le 2e membre, c'est-à-dire si

$$\alpha < \frac{1}{3.10^4}\,;$$

il suffit pour cela de prendre a' avec 5 chiffres exacts à partir de 3 inclus (th. I).

$$a' = 0{,}31830,$$

d'où $$x' = 20000\, a' = 6366.$$

Ainsi la valeur cherchée du rayon à 1^{km} près par défaut est

$$x = 6366 \text{ km}, \qquad e < 1.$$

On remarquera que, d'après l'inégalité (1),

$$\varepsilon < \frac{1}{7.10^3} \quad \text{et } a \text{ fortiori} \quad \varepsilon < \frac{1}{10^3}.$$

TABLE DES MATIERES